Enciklopedija matematičkih konstanti

Duško Letić
Nenad Cakić
Branko Davidović

kompjuter
biblioteka

Izdavač:

kompjuter biblioteka

Vojvode Stepe 34, Beograd

Tel: 011/3096-966

e-mail: kombib@gmail.com

internet: www.kombib.rs

Urednik: Mihailo J. Šolajić

Za izdavača, direktor:

Mihailo J. Šolajić

Autor: Dr Duško Letić,
Dr Nenad Cakić,
Dr Branko Davidović

Recezenti: Prof. dr Dobrilo Tošić, ETF, Beograd. Akademik, prof. dr Gradimir Milovanović, SANU. Akademik, prof. dr Teodor Atanacković, SANU.

Lektura: Mr Srđan Šerer

Korice: Zvonko Aleksić

Ilustracije za korice:
Duško Letić

Znak Kompjuter biblioteke:
Miloš Milosavljević

Štampa i CTP ploče:
„Svetlost" Čačak

Tiraž: 500

Godina izdanja: 2011.

Broj knjige: 464

Izdanje: Prvo

ISBN: 978-86-7310-484-3

Enciklopedija matematičkih konstanti
Duško Letić
Nenad Cakić
Branko Davidović

Ilustracije na prednjoj korici:
Archimedes (287-322 p.n.e),
Leonhard Euler (1707-1783),
Carkl Friedrich Gauss (1777-1855),
Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

ЛЕТИЋ, Душко, 1959-

Enciklopedija matematičkih konstanti / Duško Letić, Nenad Cakić, Branko Davidović. - 1. izd. - Beograd: Kompjuter biblioteka, 2011 (Čačak :Svetlost). - IV, 353 str.: ilustr.; 24 cm. - (Kompjuter biblioteka; knj. br. 464)

Tiraž 500. - Bibliografija: str. 343-348. - Registar.

ISBN 978-86-7310-484-3

1. Цакић Ненад, 1961. - [аутор]
2. Давидовић Бранко, 1947 [аутор]

а) Математика - Константе

COBISS.SR-ID 185699084

Predgovor

Smatra se da su matematičari u 16. veku znali manje nego grčki matematičari u vreme Arhimeda. Danas, vode ove egzaktne discipline toliko su narasle da najbolji matematičari mogu znati samo 5% čitavog korpusa znanja iz ove nauke. Činjenica je da se svake godine objavljuje više stotina hiljada matematičkih teorema. Kao posledica, u jednom malom segmentu sagledavanja tog horizonta, javljaju se mnoge matematičke konstante. Iako prosečan čovek zna za nekoliko njih, u novijim studijama broj konstanti premašuje nekoliko stotina Mnogim matematičarima bi svakako bio vrlo zanimljiv posao kada bi pisali knjigu ili neku drugu studiju o njima. Danas im stoji obilje materijala na raspolaganju. Na prvom mestu to je, svakako, Finch-ova knjiga-enciklopedija *Mathematical Constants*, sa univerziteta u Kembridžu. Ovo je jedna od najboljih referenci iz ove oblasti. Tu je i nezaobilazna knjiga Kliforda Pikoverija *Strast za matematikom* (prevedena kod nas). U knjizi svetskog autora iz istorije matematike Dirka Strojka *Kratak pregled istorije matematike* mogu se takođe pronaći značajni podaci o nastanku fundamentalnih matematičkih konstanti, koje najpre potiču od Ojlera. Takođe su tu i nepresušni izvora sa interneta. Ti izvori se uglavnom odnose na veb-sajtove koji pružaju obilje matematičkih informacija, a najzanimljiviji su svakako PTS (Mathcad.com), Wikipedia, the Free Encyclopedia (wikipedia.com), Ask Dr. Math (mathforum.org/dr.math/) i nezaobilazni MathWorld (mathworld.wolfram.com). Serija domaćih izdanja je takođe bila vrlo inspirativna, a odnosi se na istorijske komponente matematike i teorije brojeva, koje su domaći autori objavili. Izdvojimo tu:

- *Razvoj matematike*, Ernesta Stipanića.
- *Matematički vremeplov*, autora Petkovića M i Petković Lj.
- *Pregled istorije i filozofije matematike*, autora Božić, M.

Brzina kojom kompjuter može da izračuna matematičku konstantu jeste zanimljiva mera sposobnosti kompjutera i mogućnosti računanja. Danas se matematičke konstante računaju sa velikim brojem cifara, zahvaljujući brzim kompjuterima, boljim algoritmima i boljem razumevanju kako da matematički upravljamo velikim brojevima koji imaju preko milijardu cifara. Knjiga je najpre namenjena studentima matematike kao i mnogim zaljubljenicima ove discipline. Njen karakter je obrazovni i aplikativni. Većina matematičkih konstanti iznetih u knjizi se mogu veoma brzo generisati kompjuterskim algoritmima koji su ugrađeni u raznim programskim paketima. U ovom slučaju korišćen je programski paket *Mathcad* čija je sintaksa skoro podudarna sa načinom pisanja, kako to rade matematičari. U knjizi će se koristiti dvostruka notacija za pisanje formula, i to:

- Originalna sintaksa, sa Arial fontom koji je izabran u *Mathcad*-u.
- Na osnovu *World*-ovog editora, pretežno fontom Times New Roman.

Pored toga, spisak uzornih referenci (bibliografija) koje se citiraju u knjizi, nalazi se na kraju knjige, dok se u odeljcima pojedinih konstanti daju samo Veb sajtovi koji omogućuju korisniku brzu pretragu o dodatnim informacijama o konstantama

Autori se ovom prilikom veoma zahvaljuju recenzentima knjige, Prof. dr Dobrilu Tošiću sa Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, Akademiku, prof. dr Gradimiru Milovanoviću i Akademiku, prof. dr Teodoru Atanackoviću iz Srpske akademije nauka i umetnosti.

Autori

Sadržaj *Str.*

Predgovor

Fajlovi koji se nalaze u primerima mogu se preuzeti sa sajta www.kombib.rs.

Napomena: Sve tekstualne i/ili slikovne informacije koje su objavljene u ovoj knjizi a koje su preuzete sa sajta PTC-a, preuzete su uz saglasnost kompanije CPS-CAD Professional Sys.–Beograd, koja je zvanični distributer softverskog paketa *Mathcad* za Republiku Srbiju. Ekstenzije fajlova MCD odnose se na verziju *Mathcad*-a 2001, dok fajlovi ekstenzije XML (ili XMCD) pripadaju *Mathcad*-u 14.

O konstantama

Kako su nastale. Istorija govori da su oduvek bile tu.
Vladaju svemirom, samo ih treba pronaći. Imaju kraljicu zvanu π. Toliko je
mistična kao za Egipćane bog Ra, ali moćnija od njega. Jer ona vlada Orionom.
Katkada je veoma bliska, i oni koji je ne poznaju mogu je potpuno razumeti.
A onda se udalji, duboko religiozna. Nalazi se svuda, samo presvučena u drugoj
simbolici i kodovima i uvek predstavlja odnos
obima i prečnika tajanstvenog kruga. To joj je
dom. Ali kako su se milenijumi ređali uselila se
u ljudske domove preko raznih formula, te
su joj ljudi pripisali božansku moć. Šalje
nam pozdrave preko Arhimeda, kod koga
je boravila u mislima. Nečujno se tog
dana spustila do užarenog peska pokazavši
odnos obima i prečnika kruga. Arhimed se
zapita: Da li si ti 22/7? Ne, ja sam beskrajna i
iracionalna i nećete me moći dokučiti do kraja.
Sa Ojlerom sam šetala obalama Neve. No on je
voleo kraljicu e. Sada idem do Ramanudžana, jer
sam samo njemu obećala božansku pesmu. Bila je
namenjena Ojleru, ali on je našao drugu boginju.
I, zapisivao ih je Indus u tajnosti, a onda je svetu
podario predivne stihove. Pesma Brame širila
se van Indije. Izdao me je da su moji, ali ja nisam
izdala njega. Ispratila sam ga poslednjim stihom.
Kod ovih pustinjaka sam samo boravila da ih vidim
i da me vide, ali tu sam na zemlji od kada je ona postala sfera. U
galaksiji sam od kada je on postao spiralan. U svemiru sam od kada je on postao
fraktalan. U nukleusu sam od kada u njemu vladaju sile i geometrija. U entropiji sam
od Hokinga. U singularitetu sam od njegovog početka. Jedino mi je on ravan. Sa njim
ću ostati kada sve bude u njemu. Ja nisam sama. Moji anđeli su mnogobrojni i niko ih
nije dirao u inkviziciji. Nas je puno. Tako su se pojavili arhangeli: e, ϕ, γ, ζ, ... Uberite
nas jer mi smo vaše, kao što su jagode njihovih polja, zauvek.

Rad posvećujemo
senama velikih matematičara:
Arhimeda, Ojlera, Gausa i Ramanudžana

1 2 3 4 5 6 7 8 9 (*hijeratički brojevi*)

1.0 UNIVERZUM BROJEVA

1.1 Pojam broja

Broj je jedan od osnovnih pojmova matematike. Početkom 20. veka veliki filozof i matematičar Bertrand Rasel je zapisao [144] ”Ne manje strasno težio sam za saznanjem ... Pokušao sam da uhvatim pitagorejsku vrlinu koja je prirodu stvari i bića sagledavala u moći brojeva ...” U svakodnevnoj komunikaciji broj kao logički i formalni pojam intuitivno je poznat, dok ga matematičari precizno formulišu na kvantitativnim i kvalitativnim osnovama. U tom smislu se primenjuje teorija skupova, a broj, između ostalog, služi da opiše karakteristike skupa. On je ključni aksiom na kome se zasniva matematika, nastao iz prvobitne potrebe za brojanjem predmeta, a zatim se usavršavao srazmerno razvoju matematičkih znanja. Već u radovima antičkih filozofa vladalo je mišljenje da je niz prirodnih brojeva beskonačan (3. vek p.n.e.). Problemi formiranja naziva za proizvoljno velike brojeve (beskonačnost prirodnih brojeva) i redosleda prostih brojeva razmatrani su još u čuvenom Euclid-ovom delu "Elementi", kao i u Archimedes-ovoj knjizi ”O izračunavanju peska” (*Psammit*) [147]. Sa uvođenjem pojma sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja, počinje da se razvija nauka o brojevima i operacijama na njima, poznata kao aritmetika. Izučavanje složenih zakonitosti u prirodnom nizu brojeva traje i danas, i predstavlja zadatak opšte teorije brojeva. Prirodni broj se činio toliko jednostavnim i prirodnim, da ga nauka dugo nije pokušavala definisati. Preciznije definicije i objašnjenja su se pojavili tek sredinom 19. veka prilikom razvoja aksiomatske metode u matematici i same matematičke analize. To je učinjeno 70-ih godina 19. veka u radovima nemačkog matematičara Cantor-a na osnovu pojma skupova. Drugi pojam prirodnog broja dao je italijanski matematičar Peano na osnovu preciznih aksioma. Prvo uopštenje prirodnih brojeva bili su racionalni brojevi i razlomci, nastali zbog potrebe da se izmeri neka veličina, tj. uporedi sa nekom drugom veličinom (etalonom). Sva kasnija proširenja pojma broja nisu nastala na potrebama računanja i merenja, već su bila posledica razvoja matematike. Prvo od njih bilo je uvođenje negativnih brojeva, uslovljeno razvojem algebre. U Evropu je negativne brojeve uveo u upotrebu u 17. veku francuski naučnik Descartes [149]. Zatim su uvedeni iracionalni brojevi. Izučavanje pojma neprekidnosti brojeva nalazi se u radovima nemačkih matematičara Dedekind-a, Weierstrass-a i Cantor-a, što je dovelo do daljeg razjašnjavanja pojma broja i njegovih osobina. Razvojem teorije algebarskih jednačina (19. vek) pojavio se pojam kompleksnog broja. Njegovo suštinsko značenje otkrio je Gauss. Dvadeseti vek obiluje mnogim teorijama o brojevima [74], a dalja istraživanja, uz kompjutersku podršku, nastavljaju se i u 21. veku.

1.2 Brojevi i matematičke konstante

Matematička konstanta je kvantitativna veličina; najčešće realni ili kompleksni broj bez dimenzije (kao što to imaju fizičke konstante). Pojavljuje se u matematičkim izrazima kao srazmera među mnogobrojnim promenljivim veličinama. Uobičajeno je da se celi brojevi ne razmatraju kao posebne matematičke konstante, već su to skoro uvek transcendentni brojevi koji se ne mogu predstaviti u nekom zatvorenom obliku (izuzetak su brojevi 0 (nula), 1 ili Kaprekar-ov broj, poznat kao 6147), npr. kao koreni polinoma sa racionalnim koeficijentima i sl.

1.3 Neke kategorije brojeva

Važne definicije u teoriji brojeva odnose se na kategorije brojeva, tako da se dolazi do sledećih osnovnih formulacija:
Prirodni brojevi su celi nenegativni brojevi. Označavaju se sa N i predstavljaju se skupom $\{0, 1, 2, \ldots, n\} \in N$. **Celi brojevi**, pojednostavljeno govoreći, su svi "okrugli" brojevi, tj. bez decimala, uključujući nulu, pozitivne i negativne brojeve. To su, dakle, brojevi: 0, 1, 2, 3, ..., 100, 101, itd, ali i brojevi –1, –2, –3, ..., –100, –101, itd. Skup svih celih brojeva se u matematici označava velikim latiničnim slovom Z. Kao i prirodni brojevi, skup Z je zatvoren za operacije sabiranja i množenja. To znači da je zbir i proizvod bilo koja dva cela broja opet ceo broj. Međutim, za razliku od prirodnih brojeva, skup celih brojeva je zatvoren i za oduzimanje. Ovo ne važi i za deljenje, jer količnik dva cela broja ne mora da bude ceo broj. **Realni brojevi** su svi racionalni i iracionalani brojevi [131]. Skup realnih brojeva označavamo sa R. Ovaj skup je beskonačan i neprebrojiv, a broj elemenata, tzv. kardinalni broj skupa realnih brojeva, naziva se kontinuumom. Realni brojevi obrazuju polje. Termin realan stoji nasuprot čistim imaginarnim, odnosno kompleksnim brojevima. **Kompleksni brojevi** su produženi realni brojevi u čijem je sadržaju je i imaginarna konstanta i, npr.

$$K = 3 + 2\,i\,,$$

gde su: realni deo $\mathrm{Re}(K) = 3$, imaginarni deo $\mathrm{Im}(K) = 2$, dok je $i = \sqrt{-1}$ najčešća oznaka za imaginarnu jedinicu (konstantu). **Racionalni broj** može biti izražen kao odnos dva cela broja, gde imenilac nije jednak nuli. Primeri za to su brojevi: 4/5, 6/4, 1/5, 8, itd. Ako se ovi brojevi međusobno: množe, dele, sabiraju ili oduzimaju, rezultat je uvek racionalni broj. Uobičajeno je da se označavaju slovom Q. U matematici, **iracionalni broj** je onaj realan broj koji nije racionalan, tj. ne može biti napisan kao razlomak dva cela broja, odnosno nije oblika

$$\frac{a}{b} = \frac{brojilac}{imenilac}\,.$$

Ovde su su a i b celi brojevi, dok b nije jednako nuli. Ako je npr. kvantitativan odnos dve duži iracionalan, duži su međusobno nesamerljive, što znači da nemaju zajedničku meru i ne mogu se precizno odrediti. Može se lako pokazati da su iracionalni brojevi svi oni koji u svakoj brojnoj osnovi (decimalnoj, binarnoj, itd.) imaju neograničen broj cifara i pri tome se ne dolazi do beskonačnog ponavljanja nekog podniza cifara (mada matematičari nikad ovo ne bi naveli kao definiciju). U smislu preciznijeg određenja, skoro svi realni brojevi su iracionalni. Iracionalni brojevi mogu biti i koreni polinomskih jednačina sa racionalnim koeficijentima. Neki iracionalni brojevi su, dakle, algebarski brojevi, kao što su $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, dok su neki transcendentni, npr. prirodni logaritam broja 2 ($\ln 2$), Archimedes-ov broj π, Euler-ova konstanta tj. osnova prirodnog logaritma e i sl. Kompjuterskim metodama danas se traga za merom (ne)uređenosti cifara u beskrajnom nizu, ne bi li se otkrila neka zakonitost i time proširio pojam iracionalnosti, odnosno izvela njegova mera u vidu entropije.

Algebarski broj je realan broj koji može predstavljati rešenje polinoma npr. tipa $ax^2 + bx + c$, čiji koeficijenti su racionalni brojevi. Dakle oni su većinom pozitivni ili negativni brojevi koji predstavljaju rešenja ovakvih polinoma. Ovi brojevi su realni i/ili kompleksni. Realni brojevi koji nisu algebarski zovu se, shodno prethodnim definicijama, transcendentnim.
Nealgebarski brojevi su otkriveni tek sredinom 19. veka. Dobro poznati nealgbarski brojevi su π i e. Brojevi poput njih mogu se prikazati kao kontinualni razlomci ili kao granične vrednosti zbira, odnosno proizvoda nizova celih brojeva. Ostali nealgebarski brojevi su veoma retki u opštoj upotrebi. Takvi brojevi ne mogu biti izraženi kao koren bilo koje algebarske jednačine sa racionalnim koeficijentima. Nije jednostavan zadatak dokazati da je neki broj nealgebarski. Charles Hermit je dokazao da je e nealgebarski broj 1873. god, dok je Ferdinand von Lindemann 1882. god., istu osobinu dokazao za broj π. Tih godina Cantor je pretpostavio da su skoro svi realni brojevi nealgebarski, tj. da su algebarski veoma retki. Skoro svi nealgebarski brojevi su i iracionalni. Liouville je potvrdio egzistenciju transcendentnih brojeva, a 1844. g. je dokazao da ni e odnosno e^2 ne mogu biti koreni kvadratne jednačine sa racionalnim koeficijentima. To je bila karika u lancu dokaza, koja počinje Lambert-ovim dokazom da je π iracionalan broj. Zna se, takođe, da su e i e^π nealgebarski brojevi. Do danas se ne zna da li su: π^e, π^π, ili e^e nealgebarski brojevi. Generalno, matematičari nisu dokazali da li su zbirovi i proizvodi nealgebarskih brojeva, takođe, nealgebarski. To je slučaj sa sledećim konstantama $\pi + e$ ili πe. Interesantno je da ovi brojevi, pojedinačno, ne mogu biti algebarski. Kratak primer to ilustruje

$$a := \pi + e \qquad\qquad b := \pi \cdot e$$

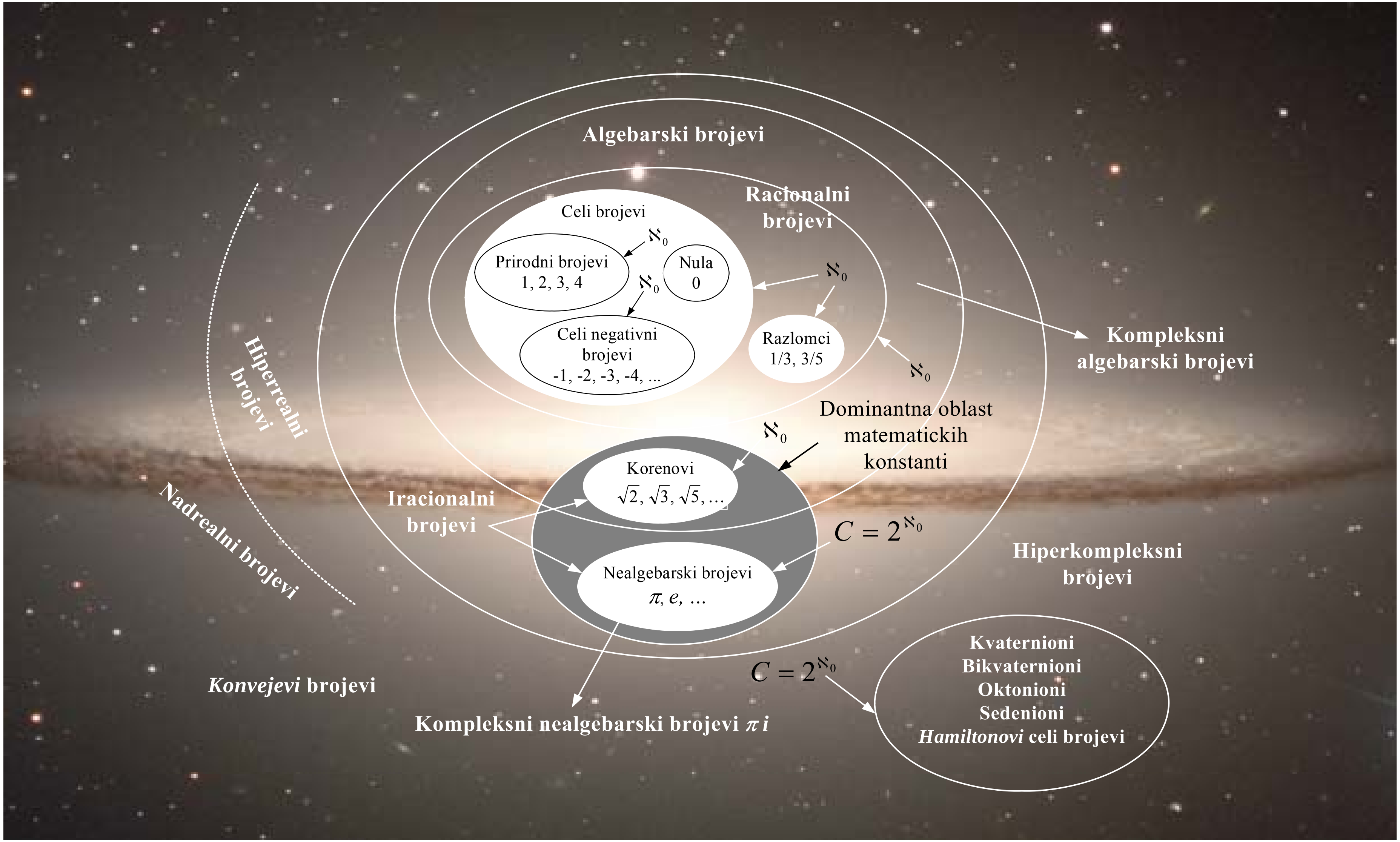
$$x^2 - a\cdot x + b = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} e \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.718281828459045 \\ 3.141592653589793 \end{pmatrix}$$

Koreni ovog polinoma su $x_1 = e$ i $x_2 = \pi$. Važeće je shvatanje da polinomi sa koeficijentima algebarskih brojeva moraju imati korene koji su, takođe, algebarski. Godine 1929. dokazano je za e^π da je nealgebarski broj, a već sledeće godine je to dokazano i za $2^{\sqrt{2}}$ (e^π i $2^{\sqrt{2}}$ su Gelfond-ove konstante). Godine 1997. matematičar S. Pinkas i Rudolf Kalman pronašli su statistički metod zvani "aproksimativna entropija" za procenu uređenosti cifara u nealgebarskim brojevima, primenivši ga, najpre, na broj π, i algebarskim brojevima kao što su $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ i sl.
Hiperkompleksni brojevi su višedimenzionalni produžeci kompleksnih brojeva, uključujući brojeve kao što su kvaternioni (za operacije u 4 dimenzije), oktonioni (8 dimenzija) i sedenioni (16 dimenzija). Otkrio ih je Hamilton 1843. god. Primarno se koriste za modeliranje dinamike kretanja mehaničkih objekata u 3D prostoru. Kao što realni brojevi popunjavaju praznine između celih brojeva, **nadrealni brojevi** popunjavaju prazninu među Cantor-ovim rednim brojevima. Ovi brojevi predstavljaju super-niz realnih brojeva koje su definisali John Conway i Donald Knuth. Oni uključuju: beskonačnost i infinitezimale, brojeve manje od bilo kog imaginarnog realnog broja i sl. "Vrlo malo se može reći o takvim brojevima, jer su i minorna istraživanja vršena na tom polju teorije brojeva" [127]. **Hiperrealni brojevi** su ekstenzija realnih brojeva kojima se dodaju beskonačno veliki realni brojevi. Pod "beskonačnim brojevima" se podrazumevaju brojevi čija apsolutna vrednost je veća od bilo kog pozitivnog broja. Još jedna važna definicija vezana je za broj, a to je njegov kontinuum. **Kontinuum** u matematici predstavlja kardinalnost skupa realnih brojeva (kao i mnogih drugih skupova). Za njega se često

vezuje tzv. *hipoteza kontinuuma* koju je precizirao Cantor. Pokazano je da su: kako hipoteza kontinuuma, tako i njena negacija, nezavisne, i predstavljaju neprotivrečne teorije. Moguća ilustracija prethodno definisanih brojeva data je na *sl. 1*.

1.4 Hipoteza o kontinuumu brojeva

U matematici, **hipoteza kontinuuma** je hipoteza o mogućim veličinama beskonačnih skupova brojeva. Georg Cantor je uveo koncept kardinalnosti, kako bi upoređivao veličine ovih skupova, i pokazao je da je skup celih brojeva strogo manji od skupa realnih brojeva [127]. Transfinitni broj je beskonačni osnovni ili redni broj (redni broj se smatra mesto u određenom nizu celih brojeva). Na primer, koristi se za računanje kao prvi, drugi, treći, četvrti do n -tog u nizu brojeva. Najmanji transfinititivni broj se naziva *alef-nula*, koji se označava kao $\aleph_0$ i računa kao broj celih brojeva (slovo $\aleph$ je prvo u hebrejskom pismu). Ako je broj celih brojeva beskonačan (sa $\aleph_0$ članova), da li postoji još viši nivo beskonačnosti? Da bi označili ovu promenu, matematičari se orijentišu na beskonačan broj racionalnih i celih brojeva kao $\aleph_0$, a beskonačan broj iracionalnih i realnih brojeva kao $\aleph_1$, što predstavlja kardinalnost kontinuuma realnog broja (obično se koristi izraz *kardinalnost* kada se govori o broju beskonačnih brojeva, ili, matematičari bi istakli da je kardinalnost iracionalnih brojeva poznata kao kontinuum). Pretpostavljeno je da je veza između $\aleph_0$ i C jednostavna i iznosi $C = 2^{\aleph_0}$. Drugim rečima, $2^{\aleph_0}$ je označeno sa C i takođe predstavlja kardinalnost niza realnih brojeva ili kontinuum. Slično tome, postoji više realnih brojeva koji uključuju racionalne (koji se mogu izražavati i u vidu razlomaka), i iracionalne brojeve (kao što su mnoge konstante, npr. π, koji se ne mogu izraziti u vidu razlomaka) nego što ima celih brojeva. Neki od ovih kardinalnih brojeva su prikazani na *sl. 1*. Ona je relativno kompleksna oblast i preko nje treba sagledavati prelazne veze s ostalim vrstama brojeva. Matematičari, takođe, razmišljaju o većim beskonačnostima, označenim sa $\aleph_1$, $\aleph_2$, i tako dalje. Na primer, postavljena teorija, simbolom $\aleph_1$ vrednuje beskonačnost kao najmanju posle $\aleph_0$. Hipotezom kontinuuma se tvrdi da je $C = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Međutim, pitanje da li je C stvarno jednako $\aleph_1$ smatra se nerešivim pomoću sadašnjih matematičkih teorija. Kad su u pitanju beskonačni skupovi, kao što su skupovi celih ili racionalnih brojeva, ovakve brojeve je znatno komplikovanije pokazati. Međutim, pokazuje se da je kardinalnost racionalnih brojeva jednaka kardinalnosti celih brojeva, i da su oba prebrojivi skupovi. Cantor-ovim *dijagonalnim postupkom* se tvrdi da celi i realni brojevi nemaju istu kardinalnost. Pored osnovne, postavljena je i **generalizovana hipoteza kontinuuma.** Cantor je verovao da je hipoteza kontinuuma tačna, i godinama je pokušavao u potpunosti da je dokaže. Znatno kasnije, 1940. g. veliki matematičar Kurt Gödel je pokazao da hipoteza kontinuuma ne može biti opovrgnuta standardnom Zermelo-Frenkel-ovom teorijom skupova, čak i ako se usvoji aksioma *izbora*. Drugim rečima, matematičari, poput Gödel-a, dokazivali su da je ova hipoteza dosledna pretpostavka u jednoj branši matematike. Međutim, drugi matematičar, Paul Koen, je 1963. dokazivao da je isto tako realno pretpostaviti da je hipoteza kontinuuma pogrešna, ili u najmanju ruku da uz iste ove aksiome hipoteza kontinuuma ne može biti dokazana [28]. Stoga, hipoteza kontinuuma je nezavisna od Zermelo-Frenkel teorije skupova sa aksiomom *izbora*. Oba ova rezultata pretpostavljaju da same Zermelo-Frenkel aksiome ne sadrže kontradikciju, i ova pretpostavka je u današnjoj matematici široko prihvaćena kao tačna.



Sl. 1 *Univerzum brojeva i sazvežđa matematičkih konstanti*

Hipoteza kontinuuma je u bliskoj vezi sa mnogim iskazima iz raznih matematičkih oblasti. Kao rezultat njene nezavisnosti, za mnoge značajne konjekture iz ovih oblasti je kasnije pokazano da su, takođe, nezavisne. Istorijski, matematičari koji su bili pristalice *bogatog* i *velikog* univerzuma brojeva su bili protiv hipoteze kontinuuma, dok oni koji su se zalagali za *uredan* i *kontrolisan* univerzum, bili za nju. Chris Frailling je 1986. predstavio argument protiv hipoteze kontinuuma, (nazvan Frailling-ova aksioma simetrije). Pokazao je da je negacija hipoteze kontinuuma ekvivalentna iskazu o verovatnoći koju je okarakterisao kao intuitivno tačnu, što je izazvalo u matematičkim krugovima puno kontraverzi. Posledice njegove *teorije nepotpunosti* su ogromne, ne samo primenom u matematici, već i u oblasti kompjuterskih nauka, ekonomije i prirode. Pored Heisenberg-ove *teorije neodređenosti*, one su ozbiljno pokolebale nastojanja teoretičara da se procesi u prirodi do maksimuma determinišu (i kontrolišu), posredstvom aksioma. Godine 1900. David Hilbert je odredio 23 važna matematička problema koje je trebalo rešiti u nastupajućem 20. veku. Teorema kontinuuma je prva na spisku važnih otvorenih pitanja koji je Hilbert pročitao na ovom čuvenom matematičkom kongresu u Parizu [110].

1.5 Pregled nekih matematičkih konstanti

”Neverovatna korist od matematičkih konstanti u egzaktnim i društvenim naukama je nešto što se graniči sa misterioznim i ne postoji razumno objašnjenje za to”, naglašava matematičar i publicista Pickover-i u knjizi *Strast za matematikom ...* (*A passion for mathematics: numbers, puzzles, madness, religion, and quest for reality*) [127]. Uz π i e kao najvažnijim konstanta u matematici, pošto se pojavljuju u nebrojenim matematičkim sadržajuma, broj novih matematičkih konstanti je u stalnom porastu. Tako ih Finch [56] svrstava u razne kategorije, a njihov broj verovatno premašuje nekoliko stotina. U nastavku se daje pregled nekih od ovih konstanti, dok se opširnije definicije i algoritmi za njihovo izračunavanje daju u narednim poglavljima. S obzirom na karakteristike i oblast primenljivosti ovih brojeva, u tabeli (T-1) se koriste sledeće oznake: **I** - iracionalan broj, **A** - algebarski broj, **T** - transcedentalni broj, **?** - nepoznata karakteristika, **G** - uopšteno, **NT** - teorija brojeva, **HT** - teorija haosa, **Km** - kombinatorika, **Inf** - teorija informacija i **AM** - matematička analiza.

T-1

Simbol	Približna vrednost	Ime	Područje
π	≈ 3,141592653589793	Pi, Archimedes-ova konstanta ili Ludolph-ov broj	G, AM, T
e	≈ 2,718281828459045	Euler-ova konstanta, osnova *ln*-logaritma	G, AM, T
$\sqrt{2}$	≈ 1,414213562373095	Pythagoras-ina konstanta, kvadratni koren iz 2	G, I, A
$\sqrt{3}$	≈ 1,732050807568877	Theodorus-ova konstanta, kvadratni koren iz 3	G, I, A
γ	≈ 0,577215664901532	Euler-Mascheroni-jeva konstanta	G, NT
φ	≈ 1,618033988749894	Zlatni odnos	G, A

β^*	≈ 0,70258	Embree-Trefethen-ova konstanta	NT
δ	≈ 4,669201609102990	Feigenbaum-ova konstanta	HT
α	≈ 2,502907875095892	Feigenbaum-ova konstanta	HT
C_2	≈ 0,660161815846869	Konstanta dvojnog prostog broja	NT
M_1	≈ 0,261497212847642	Meissl-Mertens-ova konstanta	NT
B_2	≈ 1,9021605823	Brun-ova konstanta za dvojne proste brojeve	NT
B_4	≈ 0,8705883800	Brun-ova konstanta za proste kvadruplete	NT
Λ	$> -2{,}7 \cdot 10^{-9}$	Bruijn-Newman-ova konstanta	NT
K	≈ 0,915965594177219	Catalan-ova konstanta	Km
K	≈ 0,764223653589220	Landau-Ramanujan-ova konstanta	NT, I
K	≈ 1,13198824	Viswanath-ova konstanta	NT
B_L	≈ 1,08366	Legendre-ova konstanta	NT
μ	≈ 1,451369234883381	Ramanujan-Soldner-ova konstanta	NT
E_B	≈ 1,606695152415291	Erdos-Borwein-ova konstanta	NT, I
Ω	?	Chaitin-ova konstanta	Inf, T
β	≈ 0,2801694990	Bernstein-ova konstanta	AM
λ	≈ 0,3036630029	Gauss-Kuzmin-Wirsing-ova konstanta	Km
D	≈ 0,3532363719	Hafner-Sarnak-McCurley-ova konstanta	NT
$\lambda\mu$	≈ 0,6243299885	Golomb-Dickman-ova konstanta	Km, NT
τ	≈ 0,6294650204	Cahen-ova konstanta	-
λ_0	≈ 0,6627434193	Laplace-ova granica	-

Heterogena struktura matematičkih konstanti ne upućuje na moguću hipotezu o njihovoj međusobnoj zavisnosti. Ono što je interesantno je da se Khinchin-ovom teoremom mogu povezati osobine nekih konstanti. I najpoznatija Euler-ova relacija $e^{i\pi}+1=0$ predstavlja svojevrsni generator nekih konstanti. Mnoge konstante se stvaraju na osnovu prostih brojeva, ili u obliku nizova ili proizvoda prirodnih brojeva.

1.6 Matematički algoritmi

Algoritam je specifičan niz uputstava za izvođenje nekog postupka kod rešavanja određenog problema. Obično se zahteva da se takav uređeni skup postupaka završi u racionalnom vremenskom i prostornom domenu. Smatra se da reč vodi poreklo od imena persijskog matematičara iz 9. veka Mohamed-a ibn Muse Alvarizmija (al-Khwārizmī). Reč “algoritam” je preinačeno ime ovog mislioca, koji je u to vreme napisao veoma značajnu i uticajnu raspravu o algebarskim metodama. Preciznija definicija govori da je algoritam *propisan skup dobro definisanih pravila ili instrukcija za rešavanje nekog problema, npr. realizaciju izračunavanja u konačnom broju koraka*. Izračunavanje putem algoritama u formalnoj notaciji jedan je od glavnih zadataka kompjuterskog programiranja. Mnogi koraci koji važe za programe, važe i za algoritme, i obrnuto [144]. Efektivan algoritam jeste onaj koji je efektivno izračunljiv. Ispitivanje da li za rešavanje određenih problema postoji racionalan algoritam, čini osnovu teorije algoritama. Izuzev za najjednostavnije algoritme, teško je dokazati da li je algoritam suštinski i formalno korektan. U praksi se istraživači obično moraju zadovoljiti postignutom valjanošću algoritma, na osnovu čijih kriterijuma se potvrđuje, ili verifikuje, da će algoritam izvršiti traženo izračunavanje. Taj proces podrazumeva testiranje algoritma, kako bi smo se uverili da zadovoljava postavljene kriterijume. Ako je skup testova dovoljno dobro izabran, tada se u algoritam može imati poverenja. U matematici se svakodnevno definišu novi algoritmi, naročito intenzivnim razvojem kompjuterskih programa. Tako su neki od njih poznati kao: 196-algoritam, Archimedes-ov algoritam, Brelaz-ov heuristički algoritam, Buchberger-ov algoritam, Bulirsch-Stoer-ov algoritam, Bumping algoritam, Computation algoritam, algoritam faktorizacije kontinualnog razlomka, Criss-Cross metod, Dijkstra-ov algoritam, Euclid-ov algoritam, Ferguson-Forcade algoritam, Floyd-ov algoritam, Genetički algoritam, Gosper-ov algoritam, Greedy-jev algoritam, HJLS algoritam, Kruskal-ov algoritam, Levine-O'Sullivan Greedy-jev algoritam, LLL algoritam, Markov algoritam, Miller-ov algoritam, Neville-ov algoritam, Newton-ov algoritam, algoritam faktorizacije prim-brojeva, primitivna rekurzivna funkcija, PSLQ algoritam, PSOS algoritam, Quotient-Difference algoritam, Risch algoritam, Schrage-ov algoritam, Shanks-ov algoritam, Simplex metod, Spigot-ov algoritam, Totala funkcija, algoritam Turing-ove mašine, Zeilberger-ov algoritam i dr. U ovoj knjizi reč algoritam se slobodnije koristi, kako bi se putem njega dali uređeni skupovi postupaka za nalaženje, pre svega određenih matematičkih konstanti. Za to je, često, dovoljna samo već poznata formula. Međutim, u određenim momentima mora se definisati potprogram, ili nekoliko njih, da bi korisnik postigao osnovni cilj-efikasno nalaženje matematičke konstante. Primeri su programi za generisanje prostih brojeva, a koji se ne mogu iskazati najobičnijom formulom. Drugi ciljevi algoritama i programa su postizanje efekata koji korisniku omogućuje razumevanje konstanti. Ovo se realizuje tabelarnim izračunavanjima i grafičkom vizuelizacijom. Nije, svakako, zanemarljiv ni način verifikacije dobijenih numeričkih rešenja. Posebna preimućstva *Mathcad* procesiranja su njegove sintakse i programiranje koje je visoko sofisticirano i omogućuje korisniku da prati tok evaluacije rezultata.

1.7 Paradigma prostih brojeva

Još jedna oblast teorije brojeva, opterećena još nerešenim problemom je teorija prostih brojeva. To su dobro poznati brojevi koji su deljivi sami sa sobom i sa jedinicom. Izuzimajući nulu, njihov početni redosled je: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...itd. Niz ovih brojeva ne formira prepoznatljivu šemu, i kao takvi, prosti brojevi slede neki svoj unutrašnji zakon. Opisani su "kao korov koji raste slučajno, tu i tamo", među prirodnim brojevima. Kada se proučavaju prirodni brojevi moguće je pronaći oblasti bogate prostim brojevima, ali su zato neke oblasti potpuno razuđene. Vekovima su matematičari bezuspešno pokušavali da objasne šemu koja leži u osnovi egzistencije prostih brojeva. Pre dve hiljade godina Euclid je pretpostavio da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva, ali su tek u poslednja dva veka matematičari pokušavali da dokažu da postoji i beskonačan broj prostih brojeva blizanaca (videti o Brun-ovoj konstanti). U teoriji brojeva Goldbach-ova hipoteza kaže se da je svaki paran broj zbir dva prosta broja. Mada dokaz još uvek nije nađen, ova pretpostavka se potvrđena na nekoliko stotina miliona parnih brojeva. Mnoge matematičke konstante, nastale su na bazi prostih brojeva. "Matematičari su do danas bezuspešno pokušavali da otkriju neku zakonitost u nivou prostih brojeva, pa imamo razloga da verujemo da je to misterija u koju ljudski um nikada neće proniknuti" tvrdio je Euler (iz knjige Georga Simons-a, *Računarski dragulji*, 1992.). U Euler-ovoj knjizi *Uvod u analizu beskonačnog* (”Introduction in abalysis infinitorum” iz 1748. g.) pojavljuje se funkcija *zeta* (ζ) koja će ”imati najveći uticaj i značaj u sledećem veku u istraživanjima o raspodeli prostih brojeva” [144]. U istoriji matematike zabeleženi su značajni trenuci nastanka teorema o raspodeli prostih brojeva. Tako se pored pionirskih radova Euler-a, jednim od prvih većih pomaka smatraju Legendre-ovi radovi iz 1808. g. kada je nastala formula koja prezentuje stav da broj prostih brojeva $\Pi(n)$ u odnosu na broj prirodnih n stoji u sledećoj približnoj proporciji

$$\Pi(n) \sim \frac{n}{\ln n - B}$$

Gde je $B = 1{,}08366$ Legendre-ova konstanta, za koju je on smatrao da je tačna, a kasnije je dokazano da je u stvari jednaka jedinici. Pre njega, Gauss je 1792. g. kao petnaestogodišnjak došao do približne formule o raspodeli prostih brojeva, tj. načinu na koji učestalost ovih brojeva, među ostalim brojevima opada, u sledećoj proporciji

$$\Pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$$

što je istovetno Legendre-ovoj furmuli za $B = 1$. Međutim, Gauss je prvi pretpostavio da je

$$\Pi(n) \sim Li(n) = \int_2^n \frac{1}{\ln n} dn .$$

Ovaj broj je približan vrednosti logaritamskog integrala $Li(n)$ od krajnjeg prirodnog broja n u posmatranom skupu. Gauss-ov rezultat je publikovan tek 1863. g. Tačnije rešenje podrazumeva asimptotski razvoj ove specijalne funkcije u vidu reda

$$Li(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nk!}{(\ln n)^{k+1}} \approx \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{2n}{(\ln n)^3} + \frac{6n}{(\ln n)^4} + \dots$$

Veliki doprinos teoremi o distribuciji prostih brojeva dali su: Čebišev (1850.), Riemann (1858.), krajem 19. veka, nezavisno, Hadamard (1896.), i iste godine Vallée Poussin, zasnovanoj na Riemann-ovoj *zeta* funkciji. Početkom 20. veka daljem razvoje teorije doprineli su: Koch (1901.), Ramanujan (1914.), Littlewood (1914.), dok su to 1932-33. učinili Landau i Bochner. Sredinom 20. veka, javljaju se novi prilozi teoriji prostih brojeva od strane eminentnih matematičara:

Erdős-a (1949.), Selberg-a (1950.) i Nagell-a (1951.). Godine 1955. matematičar Skewes pokazao je da bi Gauss-ova pretpostavka bila neostvariva (tj. sa *pocenjenim* brojem) kada se kriva pretpostavljene raspodele nalazi ispod krive stvarne raspodele, do slučaja neposrednog dostizanja broja sa enormnim rasponom prirodnih brojeva čiji je red veličine

$$10^{10^{10^{34}}} = 10^{10^{10000000000000000000000000000000000}}$$

G. H. Hardy je [127] nazvao ovaj broj Skewes-ovim brojem sa karakteristikom "najvećeg broja koji je ikada imao određeni smisao u matematici". Dakle, ovim se obistinila Euler-ova konjektura o *precenjenoj* raspodeli prostih brojeva. Rezultati novijeg datuma su dati u radovima Walfisz-a 1963., Landau 1974. Hardy i Wright-a (1979.), Ball-a i Coxeter-a 1987., Ingham-a 1990. Wagon-a 1991., Rubinstein i Sarnak 1994. Riesel-a 1994., Knuth-a 1998, Hardy-a 1999; Havil-a 2003, Derbyshire-a 2004. i dr. Zanimljivo je da su neka od imena ovih matematičara i kompjuterskih stručnjaka vezana i za začetnika pojedinih matematičkih konstanti. U doba informacionih tehnologija i novih algoritama, prosti brojevi se proučavaju na poseban način. U sledećoj tabeli dat je pregled veličine skupova prirodnih i pripadajućih podskupova prostih brojeva, sa analitičkom obradom ovih veličina i autorstvom

T-2

x	$\Pi(x)$	$\mathrm{Li}(x) - \Pi(x)$	$\theta(x)$	Komentar
10^6	78.498	129	-0.209	-
10^7	664.579	336	-0.1809	-
10^8	5.761.455	753	-0.1339	Meissel 1871.
10^9	50. 847.534	1.700	-0.0994	Meissel, 1886. (korigovao)
10^{10}	455.052.511	3.103	-0.0594	Lehmer, 1959. (korigovao)
10^{11}	4.118.054.813	11.587	-0.0725	-
10^{12}	37.607.912.018	38.262	-0.0781	-
10^{13}	346.065.536.839	108.970	-0.0723	Bohmann, 1972. (korigovao)
10^{14}	3.204.941.750 802	314.889	-0.0678	Lagarias Miller Odlyzko, 1985.
10^{15}	29.844.570.422.669	1.052.618	-0.0735	LMO, 1985.
10^{16}	279.238.341.033.925	3.214.631	-0.0726	LMO, 1985.
10^{17}	2.623.557.157.654.233	7.956.588	-0.0581	Deléglise Rivat, 1994.

10^{18}	24.739.954.287.740.860	21.949.554	-0.05177	Deléglise Rivat, 1994.
10^{19}	234.057.667.276.344.607	99.877.774	-0.0760	Deléglise, 1996.
10^{20}	2.220.819.602.560.918.840	222.744.643	-0.0546	Deléglise, 1996.
$2\cdot 10^{20}$	4.374.267.703.076.959.271	472.270.046	-0.0823	X. Gourdon, nov. 2000.
10^{21}	21.127.269.486.018.731.928	597.394.253	-0.0471	X. Gourdon, nov. 2000.
$2\cdot 10^{21}$	41.644.391.885.053.857.293	1.454.564.714	-0.0816	pi(x) project, dec. 2000.
$4\cdot 10^{21}$	82.103.246.362.658.124.007	1.200.472.717	-0.0479	pi(x) project, dec. 2000.
10^{22}	201.467.286.689.315.906.290	1.932.355.207	-0.0491	pi(x) project, dec. 2000.
$1{,}5\cdot 10^{22}$	299.751.248.358.699.805.270	2.848.114.312	-0.0592	P. Demichel, X. Gourdon, feb. 2001.
$2\cdot 10^{22}$	397.382.840.070.993.192.736	2.732.289.619	-0.0493	pi(x) project, feb. 2001.
$4\cdot 10^{22}$	783.964.159.847.056.303.858	5.101.648.384	-0.0655	pi(x) projekt, mart, 2001. (trenutni svetski rekord)

Relacije zastupljene u prethodnoj tabeli između ukupnog broja prostih brojeva $\Pi(n)$ i skupa prirodnih brojeva n, kao i njihovih razlika, dao je Cramer. Prema njegovoj metodi aproksimacije ovih brojeva na osnovu logaritamskog integrala sledi

da je $Li(n) = \int_2^n \frac{1}{\ln(t)}dt$, dok je Cramer-ove funkcije $\theta(n) = \dfrac{\Pi(n) - Li(n)}{\sqrt{2n\dfrac{\ln\ln(n)}{\ln(n)}}}$

Enigmatična paradigma prostih brojeva zadržana se do današnjih dana. To je direktno uticalo na istraživanja i razvoj matematičkih konstanti. Poslednja dva veka "obični" prosti brojevi su se delili na sledeće: tetradični, pandigitni, prosti faktorijeli plus jedan prosti broj i sl. Takođe, postoje Kulenovi, multifaktorijalni, polindromski i antipolindromski prosti brojevi. Ovim se još mogu dodati: strohogramatički, subskriptni, interni repdigitni, eliptični i Bakster-Hikerson-ovi prosti brojevi.. Suštinski, razvija se sasvim nova podoblast matematike koja se tiče samo atributa raznih vrsta prostih brojeva. U *Mathcad* programu generisanje prostih brojeva je vršeno najčešće za granice $<10^6$, 10^6, 10^7 ili $2\cdot 10^7$ prirodnih brojeva, te se rezultati odnose na ove skupove brojeva i dati su u pojedinim poglavljima posvećenim matematičkim konstantama, odnosno odgovarajućim fajlovima. Za dobijanje Cramer-ovih vrednosti neophodno je kompjuterski generisati proste brojeve, kao u sledećem rezultatu.

```
A(a,n,r) := | for i ∈ 2.. length(r)
            |   for j ∈ 2.. n/r_(i−1)
            |     a_(r_(i−1)·j) ← 1
            | a

Q(a,n) := | j ← 1
          | for i ∈ 2.. n
          |   if a_i = 0
          |     q_j ← i
          |     j ← j + 1
          |   1
          | q

p(n) := | (0 2)^T if n = 2
        | if n > 2
        |   a_n ← 0
        |   r ← p(ceil(√n))
        |   a ← A(a,n,r)
        |   q ← Q(a,n)
```

Primer: Za izabrani broj prirodnih brojeva

$$n := 1 \cdot 10^7 \qquad\qquad P := p(n)$$

vektor prostih brojeva sa sopstvenom vrednošću i redosledom u stoku prirodnih brojeva bi se dao kao niz, sa prvim ili sa poslednjim vrednostima

$P^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37

$P^T =$

	664572	664573	664574	664575	664576	664577	664578	664579
0	9999907	9999929	9999931	9999937	9999943	9999971	9999973	9999991

Sl. 2 *Vektor prostih brojeva sa prvim (gore) i poslednjim vrednostima redosledu (ispod)*

Ukupan broj prostih brojeva u intervalu $N[0, 10.000.000]$ iznosi $\mathrm{last}(P) = 664579$

Poslednji prost broj i njegova pozicija u ovom intervalu je

$$\max(P) = 9999991 \qquad \text{ili} \qquad P_{\mathrm{last}(P)} = 9999991$$

Vrednost logaritamskog integrala za $n = 10^7$ iznosi

$$Li(x) := \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,dt \qquad Li(n) \text{ float}, 12 \rightarrow 664917.35988$$

Razlika distribucije je

$$\Delta\Pi(n) := Li(n) - \mathrm{last}(P) \qquad \Delta\Pi(n) = 339.195$$

Kvantifikator relativnih razlika po Cramer-ovoj metodi iznosi

$$\theta(n) := \frac{\text{last}(P) - \text{Li}(n)}{\sqrt{2 \cdot n \cdot \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}} \qquad \theta(n) = -0.1826$$

Ostale vrednosti su vrlo slične tabelarnim, i u tom smislu se mogu uzeti kao verodostojne.

- Pripadnost skupu prostih brojeva

Pripadnost ili nepripadnost pojedinačnog broja skupu prostih brojeva može se programski ispitati. Tako, npr. ako je programski definisana relacija propadnosti

$$\in(x, P) := \left(\sum \overrightarrow{x = P}\right) > 0$$

tada se pojedinačni brojevi testiraju: da li pripadaju (1) ili ne pripadaju (0) generisanom skupu od 1229 prostih brojeva od prvih 10.000 prirodnih brojeva.

Za dva testirana broja $a := 9967$ i $b := 9968$

sledi da je $a \in P = 1$ i $b \in P = 0$

Problem se može postaviti i inverzno na sledeći način. Za nepripadnost izabranih brojeva *a* i *b* skupu prostih brojeva, sintaksa je

$$\notin(x, S) := 1 - \in(x, S) \qquad a \notin P = 0 \qquad b \notin P = 1$$

Slično pojedinačnom testiranju, pripadnost ili nepripadnost izabranog skupa brojeva u nekom skupu prostih brojeva (ovde je uzet domen prvih 10^4 prirodnih brojeva) može se, takođe, programski ispitati. Tako, npr. ako je dat programski blok u *Mathcad*-u kojim se rešava [112] *unija*, odnosno *podskup* skupa u vidu

```
Π(v) := | S0 ← v0
        | k ← 1
        | for  i ∈ 1.. last(v)
        |   if  v_i ∉ S
        |      | S_k ← v_i
        |      | k ← k + 1
        | S

∩(P, S2) := | Sa ← Π(P)
            | Sb ← Π(S2)
            | k ← 0
            | for  i ∈ 0.. Ω(Sa) − 1
            |   if  Sa_i ∈ Sb
            |      | I_k ← Sa_i
            |      | k ← k + 1
            | I
```

$$\cup(P, S2) := \Pi(\text{stack}(P, S2)) \qquad \Xi(P, S) := \text{sort}(\Pi(P)) = \text{sort}(\Pi(S)) \qquad \Omega(S) := \text{length}(\Pi(S))$$

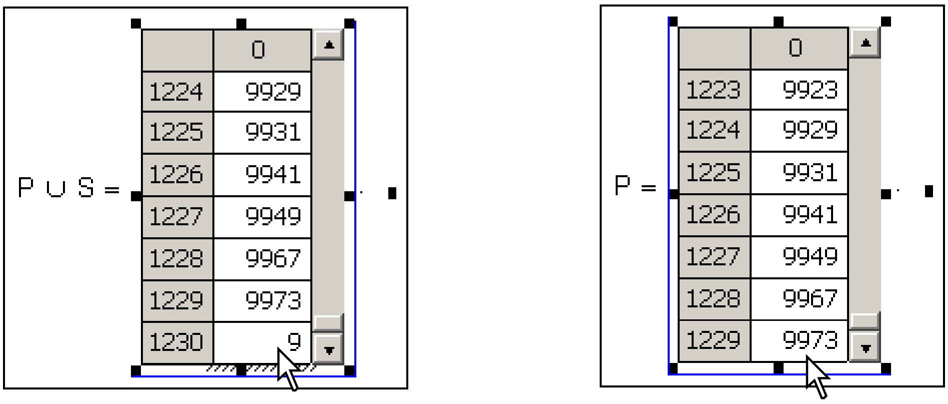
i ako je umesto jednog broja dat skup S od četiri broja

$$S := \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

presekom ovog skupa sa generisanim skupom prostih brojeva P dobija se novi skup u vidu vektora rešenja

$$P \cap S = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

dok se *unijom* povećava novoformirani skup za jedan član (a to je 9), tako da imamo sledeće rešenje:



Sl. 3 *Uporedni prikaz vektora sa pridruženim članom (unijom) i izvornim vektorom prostih brojeva (desno)*

Presekom dva skupa: testiranog S i originalnog sa prostim brojevima P, na osnovu sledećeg programskog modula:

$$\subseteq(P,S) := \Xi(P \cap S, P)$$

može se umesto jednog ispitati pripadnost (1) ili nepripadnost (0) više brojeva (vektora) generisanom skupu prostih brojeva. Na primer, za tri naredna skupa uočava se njihova konzistentnost sa prostim brojevima

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \subseteq P = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0.5 \\ 24 \\ 11 \\ 31 \end{pmatrix} \subseteq P = 0 \qquad \begin{pmatrix} 971 \\ 113 \\ 9887 \end{pmatrix} \subseteq P = 1$$

Napomena: Na ovaj način može se npr. testirati pripadnost Fermat-ovih ili Mersenne-ovih brojeva skupu prostih brojeva.

2.0 MATEMATIČKE KONSTANTE

2.1 Euler-ova matematika

Euler je objavio preko 8000 raznih referenci, gotovo sve na latinskom jeziku. Skoro da nema oblasti ondašnje matematike u kojoj ovaj matematičar nije dao doprinos. A tu su još i: inženjerstvo, fizika, astronomija i teologija. Njegove formule izražavaju svet misli, istine, poezije i religijskog duha. U analizi je proučavao beskonačne nizove (redove) i diferencijalne jednačine. Svetu je podario mnoge nove funkcije, kao što su: *gama*, *beta*, eliptične integrale i stvorio račun varijacije. Njegova notacija, za: π i e, zatim Δx, Σ i druga, koriste se i danas u neizmenjenom obliku. U mehanici je proučavao kretanje čvrstih tela u tri dimenzije, konstrukciju i upravljanje brodovima i nebesku mehaniku. Nakon njegove smrti 1783. g. radovi su mu objavljivani narednih dve stotine godina, da bi se tek 1910. g. krenulo sa publikovanjem sabranih dela, koja obuhvataju više od 75 tomova knjiga [147], [144]. Velika većina Euler-ovih radova ne sadrži samo otkrića, već i neobično i novo metodološko bogatstvo [155]. Veliki Laplace je sjojevremeno savetovao "Čitajte Euler-ove knjige, on je učitelj svih nas". Takođe je i Gauss poručivao "Studiranje Euler-ovih radova postaće najbolja škola za najrazličitija područja matematike, i ne može ga ništa zameniti". Euler je u svom životnom opusu rešio mnoge matematičke probleme, ali ono što je često isticao ostalo je još uvek nerešeno, a to je pitanje distribucije prostih brojeva. U tom smislu ovde će se pokazati neke Euler-ove relacije vezane za ove brojeve.

- Euler-ovi identiteti

Jedna od najpoznatija relacija u matematici odnosi se na *zeta* funkciju ($\infty \sim N$), koja korespondira između beskonačnog niza prirodnih brojeva i proizvoda prostih brojeva. Ova Euler-ova formula izazvala je veliku pažnju teoretičara brojeva, jer na čudesan način vezuje zbir prirodnih i proizvod prostih brojeva. Ovom formulom daje se sledeće rešenje (uz aproksimaciju da je $\infty \sim N = 100$).

$$N := 1000 \qquad x := 8 \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \prod_k \left[\frac{1}{1 - \left(P_k\right)^{-x}} \right] = 0$$

Gde je npr. njena vrednost od poznatog argumenta

$$\mathrm{Zeta}(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \qquad \mathrm{Zeta}(x) = 1.004077356$$

tada je recipročna vrednost *zeta* funkcije jednaka

$$\frac{1}{\mathrm{Zeta}(x)} - \prod_k \left[1 - \frac{1}{\left(P_k\right)^x} \right] = 0$$

Ovde je $x \in N$. Prethodna zakonitost je inicirala na stotine drugih formula koje, takođe, vezuju ova dva skupa brojeva. Mnogi od istraživanih nizova rezultiraju graničnim vrednostima čija su rešenja već dugo poznata ili su skoro nađena, te pripadaju novim matematičkim konstantama. Neke od njih povezuju više konstanti, kao što su npr. Mertens-ove konstante i sl. Pored ovih, poznate su i sledeće Euler-ove formule vezane za proizvod prostih brojeva

$$\frac{\pi}{2} - \prod_{k} \left(1 + \frac{1}{P_k} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot P_k}{2}\right)\right)^{-1} = 0$$

ili po Blatner-u (1997.), kada je $k \geq 2$ (kao inspiracija na Euler-ovu relaciju), sledi da je

$$k := 2 .. 1229 \qquad \frac{\pi}{2} - \prod_{k} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{P_k - 1}{2}}}{P_k}\right]^{-1} = 0$$

2.2 Matematičke konstante: 0, 1, √-1

Ove dobro poznate konstante, bez kojih bi došla u pitanje egzistencija cele matematike, odnose se na brojeve: nula, jedan i imaginarnu jedinici. Poznato je da su prve dve vezane za binarnu logiku, kao osnovu rada današnjih računarskih sistema, a da je imaginarna konstanta osnova mnogih složenih matematičkih izračunavanja u mehanici fluida, elektrodinamici i sl. Ovi brojevi su zastupljeni i u teorijskim problemima moderne fizike. Tako je Dirac-ova matrica isključivo sastavljena od brojeva 0 i 1. Podsetimo se da je broj jedan zastupljen u Pean-ovoj aksiomatici sa vrlo stogim konceptima. Među predloženim definicijama stoje aksiomi koje je ovaj matematičar postavio još 1899., a to su

- 1 je ceo broj,
- svaki ceo broj ima sledeći definisani, kome on prethodi,
- 1 nema prethodnog,
- ako dva broja imaju isti sledeći, oni su jednaki,
- svaki skup celih brojeva koji sadrže 1 i sledeći svakog od svojih elemenata, sadrži sve cele brojeve.

Ovih pet aksioma potpuno karakteriše skup N celih prirodnih brojeva [144]. No vek i po ranije stvorena je posebna formula, koja je izazvala veliku pažnu istraživača, a koja pripada Euler-u (mada se u istoriji matematike smatra da je ova formula bila poznata i Joannes-u Bernoulli-ju) i daje se kao

$$e^{i \cdot t} = \cos(t) + i \sin(t)$$

Za $t := \pi$ se svodi na

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Razne varijante ove jednačine mogu se dobiti iz osnovne, kao npr. $(-1)^{-i} - \exp(\pi) = 0$

ili kao opštije rešenje, gde je $n \in N$.

$$n := 0..5 \qquad e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}-2\cdot n\cdot\pi\right)} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \\ i \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

Slično prethodnim, karakteristični su i sledeći identiteti

$$i^i - \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}} = 0 \qquad \ln(-e) - 1 \text{ simplify } \rightarrow \pi\cdot i \qquad e^{\frac{\pi}{x}} = i^{-4\cdot i} \left| \begin{matrix} \text{solve}, x \\ \text{simplify} \end{matrix} \right. \rightarrow \frac{\pi}{\ln\left[(-1)^{-2i}\right]}$$

$$\left(i^{-2\cdot ni}\right)^i \text{ simplify } \rightarrow \left(e^{\pi\cdot n}\right)^i \qquad \cos(n\cdot\pi) + i\sin(n\cdot\pi) \text{ simplify } \rightarrow e^{\pi\cdot n\cdot i}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+i)\right]^2 \rightarrow i \qquad i^{4\cdot n} \text{ simplify } \rightarrow (-1)^{2\cdot n}$$

Većina identiteta je generisana trigonometrijskim funkcijama. Tako su npr.

$$\cos(i) - \frac{e+e^{-1}}{2} = 0 \qquad \sin(i) - \frac{e-e^{-1}}{2}\cdot i = 0$$

ili sa logaritamskom funkcijom $\qquad -2i\cdot\ln(i) \rightarrow \pi$

$$\ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right) \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{2}\cdot i\cdot\pi \qquad 1 + \ln\left(-e^{i}\right)\cdot i = 3.14159265358979$$

Sledeći izraz je posebno zanimljiv i dat je kao kompleksni broj

$$\sqrt{i} \text{ rectangular } \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot i = 0.7071068 + 0.7071068i$$

Kompleksna vrednost Lambert-ove funkcije u aproksimativnoj formi, od prvoj drugog i četvrtog stepena sa eksponentom imaginarne konstante, je sledeća

$$i^i \text{ simplify } \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\pi\right) \qquad i^{i^i} \text{ simplify } \rightarrow \exp\left(\frac{1}{2}\cdot i\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\pi\right)\cdot\pi\right)$$

$$i^{i^{i^{i^i}}} \text{ simplify } \rightarrow \exp\left(\frac{1}{2}\cdot i\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\cdot i\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\cdot i\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\pi\right)\cdot\pi\right)\cdot\pi\right)\cdot\pi\right) = 0.38717 + 0.03053i$$

ili aproksimativno kao

$$i^{i^{i^{i}}}\ \text{simplify}\ \rightarrow (-1)^{\frac{(-1)^{\frac{(-1)^{\frac{(-1)^{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot i}}{2}}}{2}}}{2}} = 0.38717 + 0.03053i$$

Kada se postavi veća preciznost, sa npr. 50-tim stepenom, sledi znatno tačnija vrednost funkcije

$$i^{i^{i^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{i}}}}}}\ \text{float}, 8\ \rightarrow 0.43794945 + 0.36253707$$

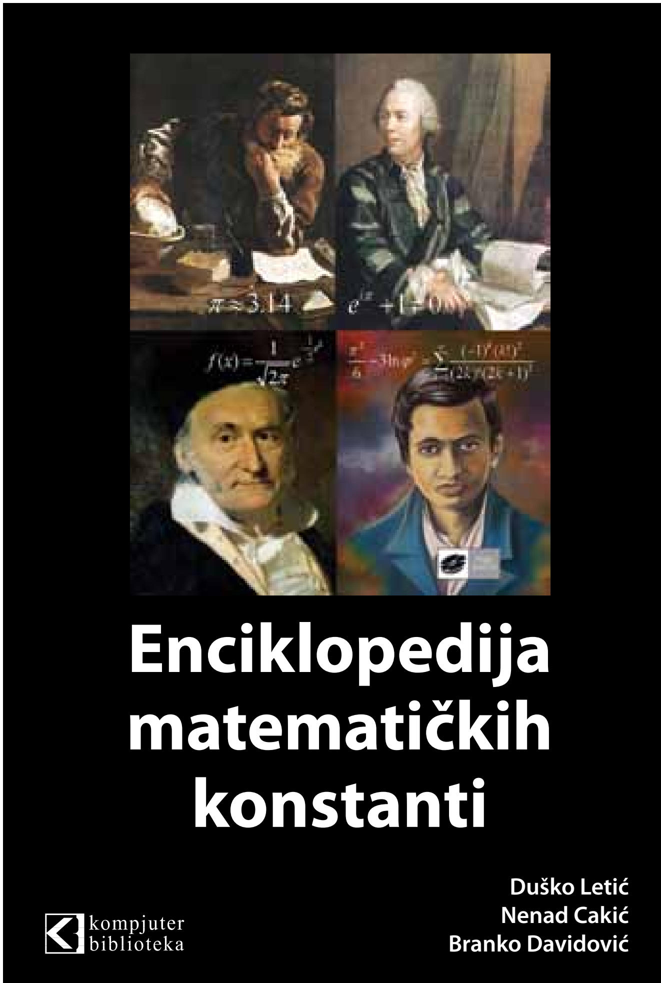
U slučaju da je broj stepeni beskonačan formira se granična vrednost Lambert-ove funkcije, kao kompleksni broj. U *Mathcad*-u se rešenje dobija na osnovu inkorporirane Lambert-ove funkcije, kao

$$\frac{-\text{LambertW}(-\ln(i))}{\ln(i)}\ \text{float}, 8\ \rightarrow 0.43828294 + 0.36059247i$$

ili u drugoj varijanti

$$\frac{2i}{\pi}\cdot\text{LambertW}\left(\frac{-\pi\, i}{2}\right)\ \text{float}, 8\ \rightarrow 0.43828294 + 0.36059247i$$

Weisstein, Eric W. "Lambert W-Function." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html
Sondow, Jonathan and Weisstein, Eric W. "*e*." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/e.html.


Enciklopedija matematičkih konstanti
Duško Letić
Nenad Cakić
Branko Davidović
kompjuter biblioteka